Exterior Plateau Problem

AUTHOR(S):

笹原, 康浩

数理解析研究所講究録
973巻 1996年 162-170

Exterior Plateau Problem

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
笹原 康浩 (Sasahara, Yasuhiro)

1. 外部 Plateau 問題に関する諸結果

$\mathbf{R}^3$において与えられた単純閉曲線に張られた曲面で、面積が最小となるものをさがすのが古典的 Plateau 問題である。この問題は Courant、Douglas および Radó などによって1930年代に一応の解決を見たが、その後も高次元化や埋め込む空間の一般化、およびその空間の幾何学的性質と解の構造に関する研究など、様々な拡張や発展が現在に至るまで行なわれている。本稿で取り扱う外部 Plateau 問題もそういった拡張の一つである。

筆者の知る限りでは、外部 Plateau 問題を最初に取り上げたのは Langevin-Rosenberg('88) である。そのなかで、彼らは $\mathbf{R}^2$から単位円板 Bを除外した領域 $\mathbf{R}^2 \setminus B$上のグラフとして表すことができる極小曲面、いわゆるグラフ解を取り扱っている。その主結果は

$$-\mathrm{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \setminus B \tag{1}$$

の解に対する無限遠点を含む最大値原理であり、これを用いて、与えられ

た懸垂面と等しい漸近挙動を持つグラフ解の一意性や解の非存在に関する結果などが得られている。外部領域における偏微分方程式の境界値問題が外部問題と呼ばれることから、グラフ解以外の場合でも、与えられた境界を持つ非有界な極小曲面の存在に関する問題は外部 Plateau 問題と呼ばれることが多い。

非有界な極小曲面はきわめて多岐にわたるが、本稿では、無限遠での挙動が半懸垂面、もしくは平面と等しい極小曲面のみを取り扱うことにし、つぎのように記号を定めておく。

$\alpha \in \mathbf{R}$ に対し、極小曲面Π_αを

$$\Pi_\alpha = \begin{cases} x_3 = \alpha \cosh^{-1} \dfrac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{|\alpha|} \quad (x_1^2 + x_2^2 > \alpha^2) & \alpha \neq 0 \\ x_3 = 0 & \alpha = 0 \end{cases} \tag{2}$$

とする。$\alpha = 0$ のときΠ_αは平面で、それ以外のときは半懸垂面となる。

Krust('89) は任意の単連結領域 Dに対し、$\mathbf{R}^2 \setminus D$上でのグラフ解に対する Perron 型の存在定理、すなわち$\alpha_1 < \alpha_2$なる$\alpha_i (i = 1, 2)$ に対してΠ_{α_i}と等しい漸近挙動をもつ外部 Plateau 問題のグラフ解が存在すれば任意の$\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ に対してもΠ_αと等しい漸近挙動をもつグラフ解が存在することや、境界の滑らかさに関する仮定のもとで、勾配が有界な解があれば、その境界値に小さな摂動を加えても解が存在することなどを示した。

しかし、優解、劣解によるバリアの構成が可能なのは方程式を考える領域が凸の場合に限られるので、この二者のような最大値原理によるアプローチでは一般的な存在定理を示すところまでは至っていない。

グラフ解以外の解を考えるためには、適当な Riemann 面から $\mathbf{R}^3$への写像によって解をあらわす、いわゆる parametrix 法を用いるのが一般的である。$\alpha = 0$ の場合には Tomi-Ye('90) によって、$\alpha \neq 0$ のときには、Kuwert('90) によって境界となる単純閉曲線Γが与えられた懸垂面のまわりをちょうど一回だけ巻いているという仮定のもとで解の存在が示された。

彼らの方法は$\Gamma_R = \Pi_\alpha \cap \{x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$ に対し、ΓとΓ_Rを境界に持つ極小曲面Σ_Rを構成し、$R \to \infty$ としたときのΣ_Rの極限が存在することを示すといったものである。

この過程で重要な役割を果たす多重境界 Plateau 問題の解の存在、およびその極限が与えられた無限遠での挙動を持つことを示すためにはバリアの構成が必要となる。$\alpha = 0$ の場合には漸近平面を上下に平行移動してΓをはさむことで、また$\alpha \neq 0$ の場合でも上記のような条件の下ならば、与えられた懸垂面自身とそれを平行移動したものでΓを囲むことで容易にバリアを構成することができる。

このように parametrix 法を用いた場合でも、一般化された最大値原理がその核となっている。

本稿ではこれらの先行する諸研究とは異なり、最大値原理を用いることなく外部 Plateau 問題の解の存在を示す。鍵となるのは、漸近曲面を平面と半懸垂面に限った場合には無限遠点として現れる理想境界は一点となる、という事実である。このことが、後述するように外部 Plateau 問題を古典的 Plateau 問題と同じ原理のもとで解決することを可能にする。

2. 問題の定式化と主結果

$B = \{w = (u,v) \in \mathbf{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$ とする。また、必要に応じて $w = (u,v) \in \mathbf{R}^2$ と $w = u + iv \in \mathbf{C}$ を同一視する。

$\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ は長さ有限な単純閉曲線とし、そのパラメータ空間 $P(\Gamma)$ をつぎのように定める。

$$P(\Gamma) = \left\{\gamma \in H^{1/2} \cap C(\partial B; \mathbf{R}^3); \gamma \text{ monotonely parametrizes } \Gamma\right\}$$

ここで漸近挙動を記述するために $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ から懸垂面への等角写像を定めておく。$\omega^\alpha : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^3$ をつぎのように定める。

$$\omega^\alpha(r,\theta) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\alpha^2 r + r^{-1})\cos\theta \\ (\alpha^2 r + r^{-1})\sin\theta \\ -2\alpha\log(\alpha r) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ここで $(u,v) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ であり、ω^α は $B_{\alpha^{-1}}(0) \setminus \{0\}$ を Π_α に写す。

種数が 0 であるような解のみを考えることにすると外部 Plateau 問題は次の (P)-(C) を満たす $X : B \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^3$ をさがすこととして定式化される。

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \Delta X = 0 & \text{in } B \setminus \{0\} \\ |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2iX_u \cdot X_v = 0 & \text{in } B \setminus \{0\} \\ X|_{\partial B} \in P(\Gamma) \end{cases}$$

$$\text{(C)} \quad \lim_{|w|\to 0} |X(w) - (\omega^\alpha(aw) + x_0)| = 0 \quad \text{for some } a \in \mathbf{C}\setminus\{0\} \text{ and } x_0 \in \mathbf{R}^3$$

$\gamma \in H^{1/2}(\partial B; \mathbf{R}^3)$ に対し、その B上への調和拡張を h^γと表すことにし、$D : H^{1/2}(\partial B; \mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}$ を

$$D(\gamma) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla h^\gamma|^2 \, dw \tag{4}$$

と定める。

γが $P(\Gamma)$ における Dの最小値を与える時、その Bへの調和拡張 h^γはΓに張られた極小曲面を与える。これより Dと同じように (P)-(C) の解、すなわち外部 Plateau 問題の解を与えるパラメータ空間上の汎関数 E_αを紹介する。

$\Psi_\alpha : (|\alpha|, \infty) \to \mathbf{R}$ を

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(t) &= \pi \left\{ t\sqrt{t^2 - \alpha^2} + \alpha^2 \log(t - \sqrt{t^2 - \alpha^2}) - \alpha^2 \log|\alpha| \right\} \\ &= \pi \int_{|\alpha|}^t \sqrt{s^2 - \alpha^2} \, ds \\ &= Area \left(\Pi_\alpha \cap \{x_1^2 + x_2^2 < t^2\} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

とする。さらに、$\rho : H^{1/2}(\partial B; \mathbf{R}^3) \to \mathbf{C}$、$\tau : H^{1/2}(\partial B; \mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}$ をつぎのように定める。

$$\begin{cases} \rho(\gamma) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\partial B} \gamma(\theta) \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ ie^{-i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \\[2em] \tau(\gamma) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\partial B} \gamma(\theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Def. $H_\alpha = \left\{\gamma \in H^{1/2}(\partial B; \mathbf{R}^3); |\rho(\gamma)| > |\alpha|\right\}$とし、$E_\alpha : H_\alpha \to \mathbf{R}$ を

$$E_\alpha = D(\gamma) - \pi|\rho(\gamma)|^2 - \Psi_\alpha(|\rho(\gamma)|) + 2\pi\alpha\tau(\gamma) \tag{7}$$

と定める。

このように定義した E_αを用いて外部 Plateau 問題の解が得られる。

MAIN RESULT.

$P_\alpha(\Gamma) = P(\Gamma) \cap H_\alpha$とする。$\Gamma$によって定まる定数$\alpha_0 > 0$ が存在し、任意の$\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$ に対して、E_αは $P_\alpha(\Gamma)$ 上で最小値をとる。さらに、$\gamma_0 \in P_\alpha(\Gamma)$ が E_αの $P_\alpha(\Gamma)$ における最小化元ならば、つぎの楕円型方程式の初期値問題の解が存在して (P)-(C) を満たす。

$$\begin{cases} \Delta X = 0 & \text{in } B \setminus \{0\} \\ \\ X = \gamma_0, \quad X_r = dE_\alpha(\gamma_0) & \text{on } \partial B. \end{cases} \tag{8}$$

上式 (8) についていくつか説明をしておく。これは、$B \setminus \{0\}$ へのγの拡張を定めたものである。

$$Y_1 = \mathrm{span}\{{}^t(\cos\theta, \sin\theta, 0), {}^t(\sin\theta, -\cos\theta, 0)\}, \tag{9}$$

とし、Y_2を Y_1の $H^{1/2}(\partial B; \mathbf{R}^3)$ における直交補空間とする。$\gamma_1 \in Y_1$に対して拡張 $P_1 : \gamma_1 \mapsto \omega^\alpha(a_0 w) + x_0$ を定める。ただし、$a_0 \in B_{\alpha^{-1}}(0), x_0 \in \mathbf{R}^3$ は∂Bで$\omega^\alpha(a_0 w) + x_0 = \gamma_1$ となるように定める。また、通常の Bへの調和拡張を P_2とする。このとき、(8) は$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$に対し、$X = P_1\gamma_1 + P_2\gamma_2$ への対応を定めることになる。このことから直ちに、(8) の解 Xが条件 (C) を満たすことがわかる。

X は $B\setminus\{0\}$ で調和であるから $|X_u|^2-|X_v|^2-2iX_u\cdot X_v$ は $B\setminus\{0\}$ で正則となるが、いま定めたような拡張を行なう場合、原点は高々1位の極となる。

ここで E_α の最小化元が (P)-(C) の解を与えることを示そう。任意の解析的な $\phi:\partial B\to\mathbf{R}$ をとって

$$\gamma_\varepsilon=\gamma_0(\theta+\varepsilon\phi) \tag{10}$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{d\varepsilon}E_\alpha(\gamma_\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0}&=dE_\alpha(\gamma_0)(\gamma_0'\phi)\\ &=\int_{\partial B}(X_r\cdot X_\theta)\phi\,d\theta\\ &=0.\end{aligned} \tag{11}$$

一方、

$$r^2|X_r|^2-|X_\theta|^2-2irX_r\cdot X_\theta=w^2(|X_u|^2-|X_v|^2-2iX_u\cdot X_v) \tag{12}$$

より、$r^2|X_r|^2-|X_\theta|^2-2irX_r\cdot X_\theta$ は B で正則であり、特に原点は少なくとも 1 次の零点となる。等式 (11) が任意の解析的な ϕ に対して成立することから $rX_r\cdot X_\theta\equiv 0$ となり、原点が零点であることから $r^2|X_r|^2-|X_\theta|^2$ もまた B で恒等的に 0 となる。以上より、X が等角写像であり、(P)-(C) の解となることが示された。

通常の調和拡張が γ に対し、

$$\begin{cases}\Delta X=0 & \text{in } B\\ X=\gamma,\quad X_r=dD(\gamma) & \text{on } \partial B\end{cases} \tag{13}$$

の解を対応させていることについて注意しておこう。Dの最小化元が極小曲面をあたえることは、上の議論をそのまま用いることで示すことができる。その意味では、ここで述べた外部 Plateau 問題の解は古典的 Plateau 問題の場合と同じ原理のもとで得られることになる。

最後に最小化元の存在について簡単に触れることにする。最小化元が存在するためには、

$$\inf_{\gamma \in P_\alpha(\Gamma)} E_\alpha(\gamma) < \inf_{\gamma \in P(\Gamma) \cap \partial H_\alpha} E_\alpha(\gamma) \tag{14}$$

が成立することが必要である。これが成立するようなαの範囲をΓによって定まる値によって具体的に評価することも可能であるが、繁雑になる上、さほど本質的なこととも思わないので、ここでは $|\alpha|$ が十分小さければ (14) が成立することを述べるのみとする。

また、古典的 Plateau 問題の場合には、最小化列の収束を導くためには 3 点条件などが必要となるが、$|\rho(\gamma)| > |\alpha|$ という条件からそのような条件を付加することなく、最小化列の収束を示すことができる。

References

[1] R. Krust, *Remarques sur le probleme exterieur de Plateau,* Duke Math. J. **59** (1989), no. 1, 161–173

[2] E. C. Kuwert, *Embedded solutions for exterior minimal surface problems,* Manuscripta Math. **70** (1990), no. 1, 51–65.

[3] R. Langevin and H. Rosenberg, *A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications,* Duke Math. J. **57** (1988), no. 3, 819–828.

[4] F. Tomi and R. Ye, *The exterior Plateau problem,* Math. Z. **205** (1990), no. 2, 233–245.